PHÂN TÍCH BÀN LUẬN MỘT SỐ CÂU HỎI VẬN DỤNG CAO TRONG ĐỀ MINH HỌA MÔN TOÁN LẦN 3 THPT QUỐC GIA NĂM 2017

GV: Nguyễn Thanh Hậu- Chuyên Võ Nguyên Giáp

1. Phạm vi kiến thức đề thi

+ Nội dung thi đều nằm trong chương trình lớp 12.

+ Các câu trong đề đều nằm trong SGK lớp 12 và có cấu trúc giống đề minh họa (T10/2016) và đề thử nghiệm (T1/2017):

2. Nội dung đề thi minh họa môn Toán THPTQG 2017 lần 3

Chủ đề	**Số câu**
Hàm số và các bài toán liên quan	11 câu
Mũ và logarit	10 câu
Nguyên hàm – Tích phân	7 câu
Số phức	6 câu
Hình học không gian	4 câu
Mặt cầu, mặt trụ, mặt nón	4 câu
Hình học tọa độ Oxyz	8 câu

3.Nhận xét về cấu trúc đề thi

Câu hỏi được sắp xếp từ dễ đến khó,giúp các em định hướng luôn được mức độ khó và dễ của từng câu trong chuyên đề như vậy các em có thể biết để tập trung ôn luyện kiến thức với mục tiêu điểm số của mình.

Đề thi chia thành 2 phần khá rõ ràng:

Phần 1: gồm 30 câu , từ câu 1 đến câu 30 chiếm 60% là những câu có mức độ nhận biết và thông hiểu với mục đích xét tốt nghiệp.

Phần 2: bao gồm 20 câu, từ câu 31 đến câu 50 chiếm 40% là những câu ở cấp độ vận dụng và vận dụng cao với mục đích phân loại học sinh xét tuyển vào các trường đại học.

Cụ thể

+ Với phần 1: 30 câu đầu đều ở mức dễ và trung bình được phân đều ở các chuyên đề khác nhau, với phần này các em chỉ cần suy luận và tính toán đơn giản. Nhiều câu trong đề chỉ cần hiểu bản chất là chọn được đáp án mà ít cần dùng casio

Trong đề thi lần này, muốn được điểm cao các em cần làm với tốc độ nhanh và chính xác, để được điểm trung bình khá cần nắm kiến thức cơ bản. Đặc biệt tránh các lỗi sai ngớ ngẩn ví dụ như: quan sát bảng và đồ thị chưa chính xác, câu dễ dùng quá nhiều thời gian.

Như câu 11 dễ nhầm lẫn khi xác định các đường tiệm cận thông qua bảng biến thiên

Với phần 2: Phần này các câu khó và cực khó cũng vẫn được phân bố đều ở các chuyên đề, trong lần tham khảo này đề không có câu hỏi thực tiễn. Một số câu có độ khó cao như câu 48, câu dễ gây nhầm lẫn như câu 34, 47. Đây sẽ là dạng bài mà các em cần dùng khá nhiều thời gian để tìm hướng giải.

4. Đối với kĩ năng dùng máy tính:

Trong đề lần này các câu có thể sử dụng trực tiếp bằng casio để giải là các câu: 1, 5, 13, 14, 19, 22, 24, 33, 35, 40. Nhìn chung đề ra với xu hướng hạn chế sử dụng máy tính.

Trong đề có khoảng 10 câu có thể sử dụng trực tiếp bằng Casio để giải (câu 1, 5, 13, 14, 19, 22, 24, 33, 35, 40). Hạn chế thể hiện ở chỗ với những câu học sinh có thể dùng máy tính thì một học sinh học lực khá hoàn toàn có thể tính nhẩm với tốc độ có thể nhanh hơn cả việc bấm máy.

Như vậy, không có sự chênh lệch quá nhiều trong việc sử dụng máy tính hay không sử dụng máy tính. Vậy nên những em khá giỏi thì có thể không cần dùng máy tính, những em yếu hơn nên dùng để kiểm tra sai xót.

Qua những nhận đề trên thì có thể thấy đề của Bộ ngày 14/5 độ khó của các câu hỏi hợp lý, có tính phân hóa học sinh cao, đặc biệt là đối tượng 8-9 với 9-10.

5 Phân tích tìm lời giải các câu hỏi vận dụng cao.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Tính $I=\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{dx}$

A. $I=-6$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-2$. **D.** $I=6$.

Phân tích tìm lời giải

Đây là câu hỏi hay học sinh không thể dùng MTCT bấm trực tiếp để có ngay kết quả được

Quan sát đặc điểm của tích phân với cận dưới $-\dfrac{3\pi}{2}$ và cận trên $\dfrac{3\pi}{2}$ và có sự xuất hiện f(x) và f(-x) nên ý tưởng để giải là đổi biến số đặt $t=-x$ ta suy ra $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{dx}=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{dx}$

Mặt khác: $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\sqrt{2+2\cos 2x}=\sqrt{4\cos^2 x}=2\left|\mathrm{cosx}\right|$

Suy ra: $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\mathrm{cosx}\right|\mathrm{dx}$. Ta có thể bấm máy được $I=6$ hoặc tính như sau:

$I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\mathrm{cosx}\right|\mathrm{dx}=2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\mathrm{cosx}\right|\mathrm{dx}$. (Do $\left|\mathrm{cosx}\right|$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$)

$$=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left|\mathrm{cosx}\right|\mathrm{dx}+2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|\mathrm{cosx}\right|\mathrm{dx}=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{cosx}\,\mathrm{dx}-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{cosx}\,\mathrm{dx}=2\,\mathrm{sinx}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\,\mathrm{sinx}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=6.$$

Ngoài ra ta có thể biến đổi $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{dx}$ để làm xuất hiện $f(x)+f(-x)$ như sau:

$I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{dx}=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{dx}+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$ đặt t=-x với tích phân $\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$ ta được

$I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{dx}+\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)\,\mathrm{dt}=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}(f(x)+\mathrm{f}(-\mathrm{x}))\,\mathrm{dx}$

Mặt khác: $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\sqrt{2+2\cos 2x}$ nên $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{dx}=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0}(\sqrt{2+2\cos 2x})\,\mathrm{dx}$

Bàn luận: Trong biến đổi trên khi đến $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{dx}=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\,\mathrm{dx}$ một số HS suy ra $f(x)=f(-x)$ nên kết hợp với giả thiết $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\sqrt{2+2\cos 2x}$

Suy ra $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+2\cos 2x}$ thì kết quả vẫn đúng và vẫn được điểm tối đa tuy nhiên nếu trình bày tự luận thì sẽ không có điểm vì suy luận trên là sai.

Câu 45. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $\left[-2017,2017\right]$ để phương trình $\log\left(mx\right)=2\log\left(x+1\right)$ có nghiệm duy nhất?

A. 2017. **B.** 4014. **C.** 2018. **D.** 4015.

Phân tích tìm lời giải:

Đây là một câu hỏi hay với cách hỏi kiểu này HS cũng không thể thử và bấm MTCT trực tiếp để chọn đáp án.

Bài toán tìm tham số m yêu cầu HS phải nắm phép biến đổi cơ bản về phương trình lôragit dạng cơ bản $\log_a f(x) = \log_a g(x)$,

Nếu đặt điều kiện từ đầu không khéo sẽ vướng vào tham số m trong điều kiện xác định sẽ rất khó xử lý nên phải khéo léo để hợp điều kiện xác định vào phép biến đổi tương đương mà không vướng đến tham số m

$$\log(mx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} mx = (x+1)^2 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

Trong phép biến đổi trên ta đã bỏ qua điều kiện $mx > 0$ vì với phương trình $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ với $0 < a \neq 1$ ta chỉ cần điều kiện $f(x) > 0$ (hoặc $g(x) > 0$).

Đến đây nội dung bài toán trở nên đơn giản là tìm m để phương trình bậc hai $mx = (x+1)^2$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn x>-1

Hướng giải thứ nhất: Kiến thức lớp 10.

$mx = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + (2-m)x + 1 = 0$

TH1: $x_1 = x_2 > -1$: $\Delta = (2-m)^2 - 4; \Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 0 \end{array}\right.$

Với m=0 loại

Với m=4 ta được nghiệm duy nhất x=1 thỏa mãn

TH2: $x_1 = -1 < x_2$ không thỏa mãn

TH3: $x_1 < -1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$

Hướng giải thứ hai :Kiến thức lớp đạo hàm lớp 12.

TH1: xét x=0 không thỏa mãn

TH2: xét $x > -1; x \neq 0$

Xét hàm: $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$; $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \ (l) \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	0

Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Vì $m\in[-2017;2017]$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên chỉ có 2018 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu là $m\in\{-2017,-2016,...,-1,4\}$.

Bàn luận: Với câu hỏi này HS lúng túng trong đặt điều kiện và chọn cách giải thứ nhất không xét đủ các trường hợp hoặc quên đặt điều kiện và biến đổi $\log(mx)=2\log(x+1)\Leftrightarrow mx=(x+1)^2$

Dẫn đến việc hiểu phương trình có nghiệm duy nhất và giải $\Delta=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=0 \end{array}\right.$

Với cách giải thứ hai không phải sợ thiếu trường hợp và cho kết quả nhanh hơn.

Câu 46. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị là A và B sao cho A,B nằm khác phía so với đường thẳng $(d): y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S ?

A. 0. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3.

Phân tích tìm lời giải.

Câu hỏi liên quan đến kiến thức cực trị lớp 12 đồng thời đề cập đến kiến thức về phương pháp tọa độ lớp 10. Trước hết phải tìm điều kiện m để hàm số có hai điểm cực trị sau đó hiểu được điều kiện tương đương để hai điểm A, B khác phía cách đều đường thẳng là y=5x-9 là như thế nào. Nhiều HS hiểu cách đều vội nghĩ đến khoảng cách từ A, B đến đường thẳng hoặc A,B đối xứng nhau qua đường thẳng. Mấu chốt ở đây là trung điểm AB nằm trên đường thẳng y=5x-9.

Cách giải thứ nhất:

$y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x\Rightarrow y'=x^2-2mx+(m^2-1)$

$\Delta'=m^2-(m^2-1)=1$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1 \end{array}\right.\Rightarrow A\left(m+1,\frac{m^3-3m-2}{3}\right);B\left(m-1,\frac{m^3-3m+2}{3}\right)$

A,B khác phía với đường thẳng (d) và có khoảng cách tới (d) bằng nhau tức là trung điểm I của AB thuộc đường thẳng (d), ta có: $I\left(m,\frac{m^3-3m}{3}\right)\in(d)\Rightarrow m^3-18m+27=0$

Ta có $(m-3)(m^2+3m-9)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 0.

Cách giải thứ hai:

$y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x\Rightarrow y'=x^2-2mx+(m^2-1)$

Ta viết $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x=y'.\text{q(x)}-\frac{2}{3}x+\frac{m^3-m}{3}$

Suy ra đường thẳng AB có phương trình $y=-\frac{2}{3}x+\frac{m^3-m}{3}$

Gọi giao điểm của đường thẳng AB với d là I ta có $5x_I-9=-\frac{2}{3}x_I+\frac{m^3-m}{3}\Leftrightarrow x_I=\frac{m^3-m+27}{17}$

A,B khác phía với đường thẳng (d) và có khoảng cách tới (d) bằng nhau tức là trung điểm I của AB $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=m$, từ đó $m^3-18m+27=0$

Theo viet của phương trình bậc 3 tổng các nghiệm S=0

Cách giải thứ 3:

Điểm uốn U là tâm đối xứng của đồ thị hàm số bậc ba nên trung điểm AB là điểm uốn $U\left(m,\frac{m^3-3m}{3}\right)\in(d)\Rightarrow m^3-18m+27=0$

Theo viet của phương trình bậc 3 tổng các nghiệm S=0

Bàn luận

Nếu đây là đề thi tự luận thì là câu hỏi mức vận dụng thấp còn là câu hỏi với hình thức trắc nghiệm thì là câu hỏi khó vận dụng kiến thức 12 và hình giải tích lớp 10.

Học sinh lúng túng khi đưa ra điều kiện A,B khác phía và cách đều đường thẳng y=5x-9

Cách giải thứ nhất là kiến thức thông thường theo SGK nhưng mất nhiều thời gian vì phải tính toán nhiều bước dài dòng

Cách giải thứ hai đòi hỏi phải tìm hiểu thêm vì kiến thức này không có trong SGK. HS phải biết thực hiện phép chia đa thức bậc ba cho đa thức bậc hai để tìm phần dư, tuy tính toán ít bước hơn cách thứ nhất nhưng thực hiện phép chia đòi hỏi tính toán nhanh mới kịp thời gian.

Với cách giải thứ ba rất ngắn gọn và tốn ít thời gian chỉ cần để ý đến tính chất tâm đối xứng của đồ thị hàm số bậc ba được học trong SGK.

Câu 48. Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m ,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$

A. $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$.

B. $P=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

C. $P=5\sqrt{2}+2\sqrt{73}$.

D. $P=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$.

Phân tích tìm lời giải:

Goi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z, khi đó:

$$|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-7)^2}=6\sqrt{2}\ (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\sqrt{(x-1)^2+(x+4)^2}$ với x,y thỏa mãn đẳng thức (*).

Nội dung bài toán cực trị đại số

Ý tưởng để giải
Hướng 1: Sử dụng Bất đẳng thức đại số
Hướng 2: Sử dụng đạo hàm
Hướng 3: Phương pháp hình học
Trong các định hướng hướng trên thì phương pháp hình học là thuận lợi hơn cả vì các biểu thức dưới dấu căn giúp ta liên tưởng đến độ dài đoạn thẳng hoặc véc tơ.
Cách giải như sau. gọi M(x;y) là biểu diễn số phức z.
Gọi các điểm $A(-2;1)$, $B(4,7)$, $C(1;-1)$.
Ta có $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2}$, mà $AB=6\sqrt{2} \Rightarrow MA+MB=AB$
Suy ra M thuộc đoạn thẳng AB .

Cách 1: Phương trình đoan $AB: y=x+3$, $x\in[-2;4]$
Ta có $|z-1+i|=MC \Rightarrow |z-1+i|^2=MC^2=(x-1)^2+(y+1)^2=(x-1)^2+(x+4)^2=2x^2+6x+17$
Đặt $f(x)=2x^2+6x+17$, $x\in[-2;4]$
$f'(x)=4x+6$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$ (nhận)
Ta có $f(-2)=13$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{2}$, $f(4)=73$.
Vậy $f(x)_{\max}=f(4)=73$, $f(x)_{\min}=f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{2}$.
$\Rightarrow M=\sqrt{73}$, $m=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. $\Rightarrow P=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

Cách 2:
Goi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z ,
Các điểm $A(-2;1)$, $B(4,7)$, $C(1;-1)$.
Ta có $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2}$, mà $AB=6\sqrt{2} \Rightarrow MA+MB=AB$
Suy ra M thuộc đoạn thẳng AB .
Phương trình đoạn $AB: y=x+3$
$CM_{\min}=d(C;AB)=\frac{5}{\sqrt{2}}$; $CB=\sqrt{73}; CA=\sqrt{13} \Rightarrow CM_{\max}=CB=\sqrt{73}$
Vậy $P=\sqrt{73}+\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{73}+5\sqrt{2}}{2}$.

Cách 3: Gọi $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), (r>0)$
$$|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(r\cos\varphi+2)^2+(r\sin\varphi-1)^2}+\sqrt{(r\cos\varphi-4)^2+(r\sin\varphi-7)^2}=6\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{5+r^2+2r(2\cos\varphi-\sin\varphi)}+\sqrt{65+r^2-2r(4\cos\varphi+7\sin\varphi)}=6\sqrt{2} \ (*)$$

$|z-1+i|=\sqrt{(r\cos\varphi-1)^2+(r\sin\varphi+1)^2}=\sqrt{2+r^2+2\sqrt{2}r\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)}$

Vì $-1\le\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$ nên giá trị nhỏ nhất $m=\sqrt{2+r^2-2\sqrt{2}r}$ khi $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ và giá trị lớn nhất

$M=\sqrt{2+r^2+2\sqrt{2}r}$ khi $\varphi=\frac{3\pi}{4}$

Thay $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ vào (*) ta được

$\sqrt{5+r^2+2\sqrt{2}r}+\sqrt{65+r^2-11\sqrt{2}r}=6\sqrt{2}$ (**)

Thay $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ vào (*) ta được

$\sqrt{5+r^2-3\sqrt{2}r}+\sqrt{65+r^2-3\sqrt{2}r}=6\sqrt{2}$ (***)

Sử dụng MTCT giải (**) và (***) ta được r_1 và r_2 sau đó thay vào m và M

Bàn luận:

Theo nhận xét của nhiều thầy cô và các chuyên gia thì đây là câu hỏi khó nhất của đề thi . Câu hỏi thuộc nội dung chủ đề số phức nhưng bản chất thực sự là bài toán cực trị đại số được giải quyết bằng phương pháp hình học

Từ giải thiết $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-7)^2}=6\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2}$

Với M(x;y) biểu diễn số phức z=x+yi, A(-2;1), B(4;7)

Học sinh dễ mắc sai lầm khi kết luận tập hợp M(x;y) là đường Elip với tiêu điểm A và B và cố gắng tìm ra phương trình đường Elip nhằm biểu diễn x theo y, nhưng cũng từ ý tưởng này HS giỏi hơn biết kiểm tra điều kiện điểm M thuộc Elip khi và chỉ khi a>c với AB=2c thì phát hiện ra MA+MB=AB. Đẳng thức này được xem là chìa khóa để mở ra lời giải bài toán

Với cách giải thứ nhất và thứ hai ta được đáp số chính xác, còn cách giải thứ ba phải sử dụng máy tính để tìm nghiệm gần đúng rồi so sánh với các phương án A,B,C và D để chọn đáp số gần nhất.