RÈN LUYỆN KỸ NĂNG ĐỌC ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = f'(x)$

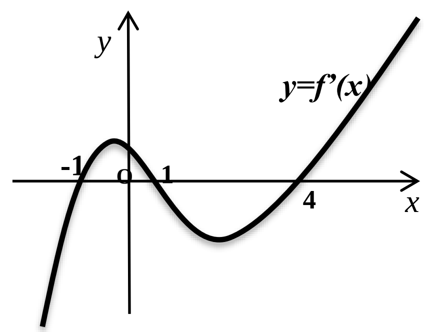
Giáo viên: **Phạm Xuân Hải**
Trường THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình

I. ĐẶT VẤN ĐỀ:

Trong đề minh họa THPT Quốc Gia 2018 của Bộ GD – ĐT câu 39 được phát biểu như sau:

Bài 1. ***(Trích đề thi minh họa của BGD 2018)***

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng.

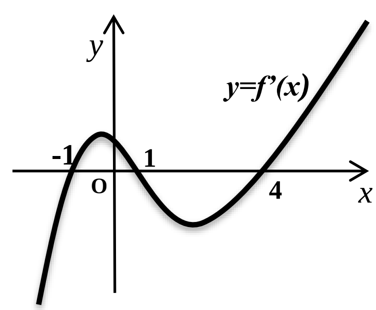


A. $(1;3)$ **B.** $(2;+\infty)$
C. $(-2;1)$ **D.** $(-\infty;-2)$

Đây là một bài toán đẹp về nhận biết, phân tích đồ thị. Dạng câu hỏi này đã xuất hiện nhiều trong các đề minh họa, thi thử và đề chính thức của năm trước và năm nay. Chẳng hạn:

Bài 2 (Trích đề thi thử của trường THPT Chuyên Thái Bình lần 5 – 2018)

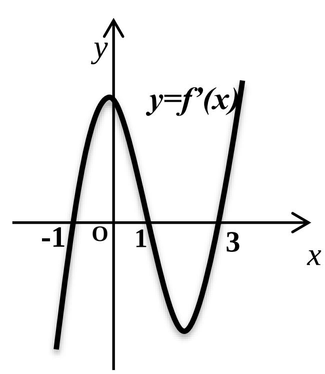
Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị hàm số $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$.



A. 1 **B.** 2
C. 4 **D.** 3

Bài 3 (Trích đề thi thử của trường THPT Chuyên Đại học Vinh lần 1– 2018)

Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực đại của hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là



A. 1 **B.** 2
C. 4 **D.** 3

Muốn giải được dạng bài tập này đòi hỏi học sinh phải nắm vững các lý thuyết về đơn điệu, cực trị,đồ thị… của hàm số và phải "đọc" được các tính chất đó trên đồ thị. Bài viết này nhằm giúp các em học sinh ôn tập lại các lý thuyết đã học của phần hàm số để từ đó có phương pháp làm cho dạng bài toán này.

II. NỘI DUNG

II. 1 CÁC ĐỊNH LÝ CẦN NẮM

Định lý 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K

a. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số đồng biến trên K.

b. Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số nghịch biến trên K.

Ta có định lý mở rộng sau đây:

Định lý 2. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K. Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) , $\forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K.

Định lý 3. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}; h > 0$.

a. Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một ***điểm cực đại*** của hàm số $f(x)$.

b. Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một ***điểm cực tiểu*** của hàm số $f(x)$.

Bảng biến thiên:

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		+	**0**	-	
$f(x)$		↗	f_{CD}	↘	

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		-	**0**	+	
$f(x)$		↘	f_{CT}	↗	

Định lý 4. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho đồ thị *(G)* của hàm số $y = f(x)$; *p* và *q* là hai số dương tùy ý. Khi đó:

a. Tịnh tiến *(G)* lên trên *q* đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) + q$

b. Tịnh tiến *(G)* xuống dưới *q* đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) - q$

c. Tịnh tiến *(G)* sang trái *p* đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$

d. Tịnh tiến *(G)* sang phải *p* đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$

Định lý 5.

a. Nếu hàm số $h = h(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y = g(h)$ có đạo hàm tại điểm $h_0 = h(x_0)$ thì hàm số hợp $f(x) = g\left[h(x)\right]$ có đạo hàm tại điểm x_0 và

$$f'(x_0) = g'(h_0).h'(x_0)$$

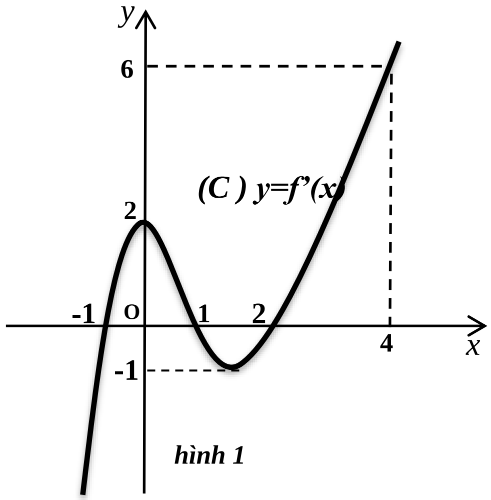
b. Nếu giả thiết trong phần a thỏa mãn đối với mọi điểm x thuộc J thì hàm số hợp $y = f(x)$ có đạo hàm trên J và $f'(x) = g'\left[h(x)\right].h'(x)$.

Ghi chú: Công thức thứ hai trong định lý này còn được viết gọn là: $f' = g'_h.h'_x$.

II.1 CÁC BÀI TOÁN

BÀI TOÁN 1.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới.



hình 1

1.1) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

1.2) Xác định các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$

1.3) Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$

1.4) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $\left[-1;4\right]$

1.5) Biết $f(-1) > 0$,Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$

1.6) Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ở hình 1, hỏi hàm số $g(x) = f(1-x)$ đồng biến trên khoảng nào?

1.7) Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ở hình 1, xác định số cực trị của hàm số $g(x) = f(x-1)$?

1.8) Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ở hình 1, xác định số cực trị của hàm số $\mathrm{h}(x) = f(x) + 2x$?

Hướng dẫn

1.1) Dựa vào đồ thị ta lập được bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:

x		-1		1		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta có các kết luận:

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ hình 1,

1.2) Xác định các khoảng đơn điệu

- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1),(1;2)$

- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;1),(2;+\infty)$

1.3) Xác định cực trị của hàm số

- Hàm số đạt cực đại tại hai điểm $x=-1; x=2$, đạt cực tiểu tại $x=1$.

1.4) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$

Ta bảng biến thiên xác định được $\max\limits_{[-1;4]} y = \max\{f(1); f(4)\}$ và $\min\limits_{[-1;4]} y = \min\{f(-1); f(2)\}$

Để xác định được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$ ta so sánh $f(1); f(4)$ và $f(-1); f(2)$ bằng cách:

Đặt $S_1;S_2;S_3$ lần lượt là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox trên các đoạn $[-1;1],[1;2],[2;4]$, từ hình 1 ta so sánh được $S_1 > S_2; S_3 > S_2$.

+) $S_1 > S_2 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f'(x)dx > -\int_{1}^{2} f'(x)dx \Leftrightarrow f(x)\Big|_{-1}^{1} > -f(x)\Big|_{1}^{2} \Leftrightarrow f(1) - f(-1) > -f(2) + f(1)$

Suy ra : $-f(-1) > -f(2) \Leftrightarrow f(-1) < f(2)$. Nên $\min\limits_{[-1;4]} y = f(-1)$

+) $S_3 > S_2 \Leftrightarrow \int_{2}^{4} f'(x)dx > -\int_{1}^{2} f'(x)dx \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{4} > -f(x)\Big|_{1}^{2} \Leftrightarrow f(4) - f(2) > -f(2) + f(1)$

Suy ra: $f(4) > f(1)$. Nên $\max\limits_{[-1;4]} y = f(4)$

1.5) Biết $f(-1) > 0$ xác định số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$

Dựa vào bảng biến thiên và câu 1.4 ta có $f(2) > f(-1) > 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

1.6. Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ở hình 1,hàm số $g(x) = f(1-x)$ đồng biến trên khoảng nào?

Ta có $g'(x) = \left(f(1-x)\right)' = -f'(1-x)$ nên để tìm khoảng đồng biến của hàm số

$g(x) = f(1-x)$, ta sẽ tìm x để $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x < -1 \\ 1 < 1-x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ -1 < x < 0 \end{array}\right.$

Lúc đó, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0), (2;+\infty)$.

1.7 Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ở hình 1,xác định số cực trị của hàm số $g(x) = f(x-1)$?

Hướng dẫn: Tính đạo hàm của hàm số $y = g(x)$ ta được $y = g'(x) = f'(x-1)$.

Cách 1. $g'(x) = f'(x-1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 > 2 \\ -1 < x-1 < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ 0 < x < 2 \end{array}\right.$

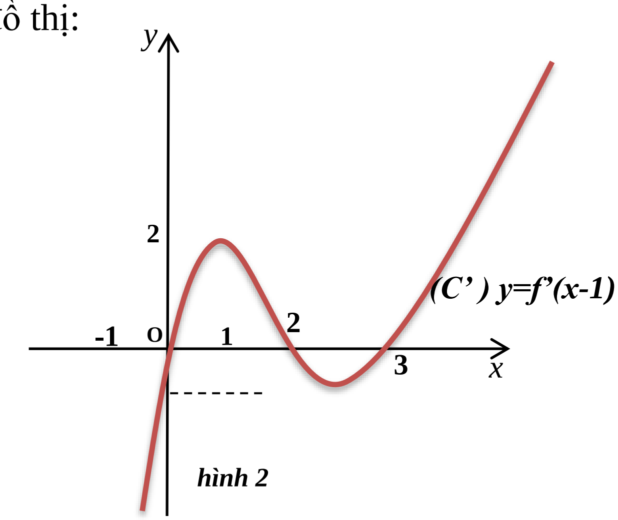
Và $g'(x) = f'(x-1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 < -1 \\ 1 < x-1 < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ 2 < x < 3 \end{array}\right.$

Từ đây ta lập được bảng biến thiên:

x		0		2		3	
$f'(x-1)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x-1)$	↘		↗		↘		↗

Kết luận: Hàm số $g(x) = f(x-1)$ có 3 cực trị (đạt cực đại tại $x = 2$, đạt cực tiểu tại $x = 0, x = 3$)

Cách 2: Sử` dụng định lý 4 ta có được đồ thị của hàm số $f'(x-1)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị (C) sang phải 1 đơn vị . Ta có đồ thị:



Nên số cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x-1)$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$.

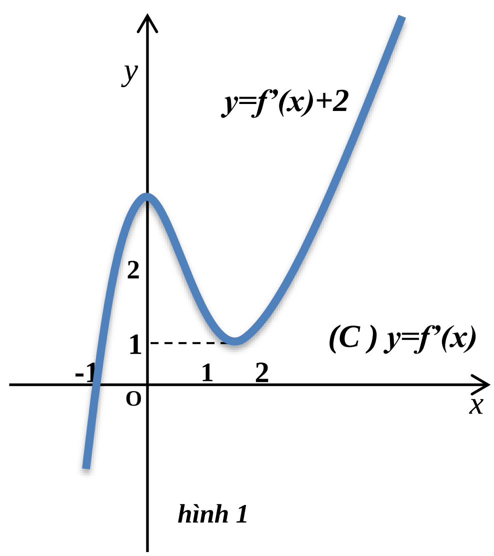
Kết luận: Hàm số $y = g(x)$ có 3 cực trị.

1.8 Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ở hình 1,xác định số cực trị của hàm số $h(x) = f(x) + 2x$?

Cách 1. Lập bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(x) + 2x$

Cách 2. Sử dụng *định lý 4.*

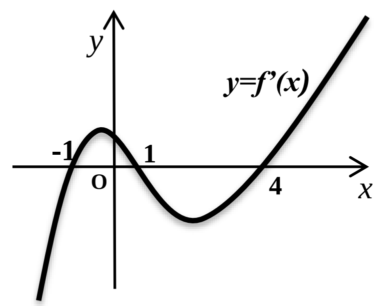
Ta có $h'(x) = f'(x) + 2$. Nên ta có được đồ thị của hàm số $h'(x) = f'(x) + 2$ bằng cách tịnh tiến đồ thị (C) lên trên 2 đơn vị . Dựa vào đồ thị, ta kết luận hàm số $h(x)$ có 1 cực trị.



Trở lại các bài toán đã nêu

Bài 2 (Trích đề thi thử của trường THPT Chuyên Thái Bình lần 5 – 2018)

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị hàm số $y = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$.



A. 1 **B. 2**
C. 4 **D. 3**

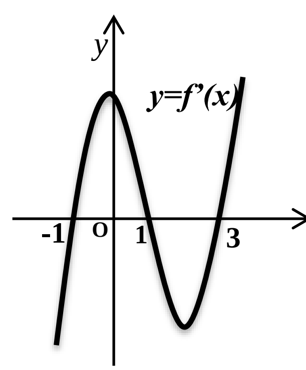
Hướng dẫn:

Ta có: $y' = 2.f'(x).e^{2f(x)+1} + f'(x).5^{f(x)}.\ln 5 = f'(x).\left(2.e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}.\ln 5\right)$

Nhận xét $2.e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}.\ln 5 > 0, \forall x$ nên dấu của y' phụ thuộc hoàn toàn vào dấu của $f'(x)$. Do hàm số $f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên hàm số $f'(x)$ có 3 cực trị. **Chọn D**

Bài 3 (Trích đề thi thử của trường THPT Chuyên Đại học Vinh lần 1– 2018)

Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực đại của hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$ là



A. 1 **B. 2**
C. 4 **D. 3**

Hướng dẫn: Quan sát đồ thị $y = f'(x)$ có dạng hàm số bậc ba. Phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $x = \pm 1; x = 3$ nên $f'(x) = a(x-1)(x+1)(x-3); a > 0$.

Suy ra $y = f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right) = a\left(\sqrt{x^2+2x+2} - 1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2} + 1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2} - 3\right)$

Từ đây ta tính được $f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right) = \dfrac{a\left(x+1\right)^2\left(x^2+2x-7\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+3}$

Đặt $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$, ta có:

$$g'(x)=\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)'.f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=\frac{a\left(x+1\right)^3\left(x^2+2x-7\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+3\right)}$$

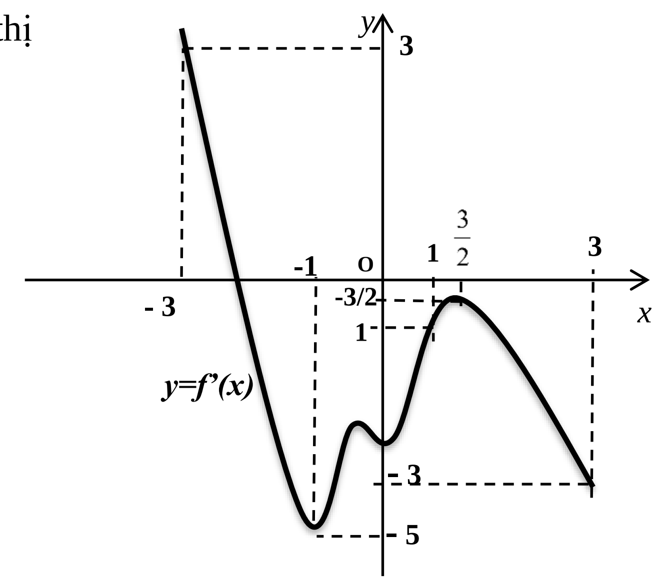
Lập bằng biến thiên $g(x)$ ta có

x		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	↘		↗		↘		↗

Dựa vào bảng biến thiên , hàm số $g(x)$ có đúng 1 cực đại. Ta chon **đáp án**

Bài 4. (Trích đề thi thử của trường THPT Chuyên Chu Văn An – Hà Nội – 2018)

Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(1-x)+\frac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-3;1)$ **B.** $(-2;0)$

C. $(1;3)$ **D.** $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$

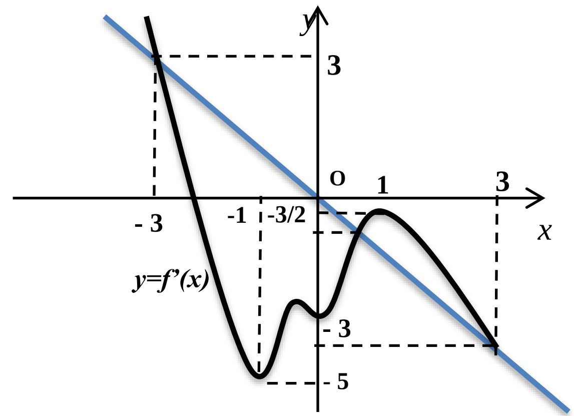
Hướng dẫn

Hướng dẫn: đặt $y = g(x) = f(1-x) + \dfrac{x^2}{2} - x$

Suy ra, $g'(x) = -f'(1-x) + x - 1 = -f'(t) - t$,
với $t = 1-x$

Hàm số nghịch biến khi và chỉ khi
$-f'(t) - t < 0 \Leftrightarrow f'(t) > -t$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta xác định được:



$$f'(t) > -t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -3 \\ 1 < t < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x < -3 \\ 1 < 1-x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ -2 < x < 0 \end{array}\right.$$

Chọn B

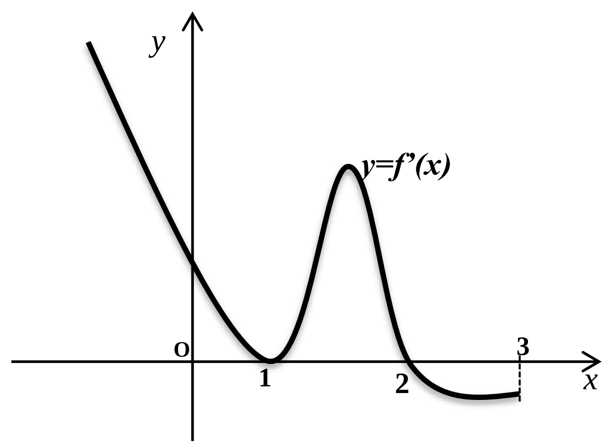
Bài 5.

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết $f(0) = 0$, trong các khẳng định sau, khẳng định nào luôn đúng

I. $f(0) > f(1)$

II. $f(2) > f(1)$

III. $f(1) > f(3)$



hình 1

A. Chỉ duy nhất ***I*** đúng.
B. Chỉ duy nhất ***II*** đúng.
C. Chỉ duy nhất ***III*** đúng.
D. II và III đúng.

Hướng dẫn: Từ đồ thị $f'(x)$ ta lập được bảng biến thiên

x	0		1		2		3
$f'(x)$		+	0	+	0	-	
$f(x)$		↗		↗		↘	

Từ đây ta có $f(0) < f(1) < f(2)$

Vì vậy *I* sai, *II* đúng. Ta kiểm tra tính đúng sai của *III*.

Đặt S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, trục Ox trên đoạn $[1;2]$ và $[2;3]$. Dễ dàng có $S_1 > S_2$ nên $\int_1^2 f'(x)dx > -\int_2^3 f'(x)dx$. Suy ra $f(1) < f(3)$. Nên III sai. Nên ta **chọn B**

III. KẾT LUẬN

Trên đây là một số lý thuyết và các ví dụ minh họa về vấn đề này. Hy vọng sẽ ít nhiều giúp ích cho các em học sinh 12 trong kỳ thi THPT sắp tới.