PHẦN I - MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Dạng 1: ***Hệ phương trình đối xứng loại I***

1. Hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} F_1(x;y)=0 \\ F_2(x;y)=0 \end{cases}$$, với $F_1(x; y) = F_1(y; x)$ và $F_2(x; y) = F_2(y; x)$

Phương pháp :

- Đặt $\begin{cases} x+y=S \\ x.y=P \end{cases}$
- Biến đổi hệ phương trình đã cho thành hệ ph ương trình với hai ẩn S, P.
- Giải hệ phương trình với hai ẩn S, P.
- Với mỗi cặp (S, P) tìm được, tìm nghiệm (x; y) từ hệ: $\begin{cases} x+y=S \\ x.y=P \end{cases}$

Trong đó x, y là các nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

Chú ý:

Nếu ($x_o;y_o$) là nghiệm thì ($y_o;x_o$) cũng là nghiệm của hệ phương trình.

2. Ví dụ minh hoạ:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+xy=-7 \\ x^2+y^2-3x-3y=16 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Giải:

Ta có (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=-7 \\ x^2+y^2-3(x+y)=16 \end{cases}$ (II)

Đặt $\begin{cases} x+y=S \\ x.y=P \end{cases}$, ta được hệ (II) trở thành:

$$\begin{cases} S+P=-7 \\ S^2-3S-2P-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=-S-7 \\ S^2-S-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=-S-7 \\ \left[\begin{array}{l} S=-1 \\ S=2 \end{array}\right. \end{cases}$$

* Với S = - 1 thì P = - 6 , ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x.y=-6 \end{cases}$

x, y là các nghiệm của phương trình: $X^2 + X - 6 = 0$.

Suy ra $X_1 = -3$; $X_2 = 2$.

Do đó hệ có nghiệm: (-3 ; 2), (2; -3)

* Với S = 2 thì P = - 9 , ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=2 \\ x.y=-9 \end{cases}$

Giải tương tự trên ta được các nghiệm: $(1-\sqrt{10}\ ;\ 1+\sqrt{10})$, $(1+\sqrt{10}\ ;\ 1-\sqrt{10})$

Kết luận: Hệ phương trình có bốn nghiệm:

(-3 ; 2), (2; -3), $(1-\sqrt{10}\ ;\ 1+\sqrt{10})$, $(1+\sqrt{10}\ ;\ 1-\sqrt{10})$

Dạng 2: ***Hệ phương trình đối xứng loại I I***

1. Hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$ với äEy, x) = gEx, y);   gEy, x) = äEx, y)

Phương pháp :

- Trừ theo vế của hệ (I) được phương trình hệ quả: $f(x,y) - g(x,y) = 0$
- Chia $f(x,y) - g(x,y)$ cho $(x - y)$ được $h(x,y)$

$$\Leftrightarrow f(x,y) - g(x,y) = (x- y).\, h(x,y) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ h(x,y)=0 \end{array}\right.$$

- Hệ đã cho $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x,y)=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases} \end{array}\right.$

Chú ý:

+ $(x - y)\, h(x,y) = (x - y).\, h(y,x) \Rightarrow h(x,y)$ là đa thức đối xứng với x và y.

+ Hệ phương trình đối xứng loại II hai ẩn có nghiệm (α,β) thì hệ phương trình có nghiệm $(\beta,\alpha) \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \beta=\alpha$ dạng nghiệm (α,α).

2. Ví dụ minh hoạ:

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy=m(y-1) \\ y^2+xy=m(x-1) \end{cases}$ (I) ở đó m là tham số.

a) Giải hệ phương trình đã cho khi m = -1.

b) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Giải:

a) Với m=-1 (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy=1-y \\ y^2+xy=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0 \\ x^2+xy=1-y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ x^2+xy=1-y \end{cases} \\ \begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2+xy=1-y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ 2x^2+x-1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x+1=y \\ x^2+x(1-x)=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ x=-1;\quad x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=1-x \\ x\in R \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x\in R \\ y=1-x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\in R \\ y=1-x \end{cases} \end{array}\right.$$

b) *Điều kiện cần*:

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y, z) thì theo chú ý

$\Rightarrow x_0 = y_0$

$\Rightarrow$ Phương trình: $2x^2 - mx + m = 0$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 8$

Điều kiện đủ:

* Với m = 0 $\Rightarrow$ hệ PT đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy = 0 \\ y^2 + xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0\,; \quad x = -y \\ y = 0\,; \quad y = -x \end{cases}$

Hệ phương trình này có vô số nghiệm dạng $\begin{cases} x \in R \\ y = -x \end{cases}$ (loại)

* Với m = 8 hệ phương trình sẽ trở thành:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 8(y-1) \\ y^2 + xy = 8(x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+8) = 0 \\ x^2 + xy = 8\,(y-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + xy = 8\,(y-1) \end{cases} (*) \quad \text{hoặc} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 8 = 0 \\ x^2 + xy = 8\,(y-1) \end{cases} (**)$$

Giải hệ (*):

$$\begin{cases} x = y \\ 2x^2 - 8x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Giải hệ (**)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 8 = 0 \\ x^2 + xy = 8\,(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8 - x \\ x^2 + xy = 8\,(y-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -8 - x \\ x^2 + x(-8-x) = 8(-8-x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8 - x \\ ox = -72 \end{cases}$$

Hệ phương trình vô nghiệm . Tóm lại $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ m = 8

Dạng 3: *Hệ phương trình đẳng cấp*

1. Hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} F(x,y) = A \\ G(x,y) = B \end{cases}$$

với F và G là các biểu thức đẳng cấp đối với x,y còn A, B là các hằng số.

Phương pháp :

- Giải hệ với y = 0.
- Với y$\neq$ 0 đặt x = ky và được một phương trình theo k. Giải tìm k $\Rightarrow$ x,y.

2. Ví dụ minh hoạ:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$ (I)

Giải:

Đây là hệ đẳng cấp bậc hai đối với x,y.

+ Với y = 0 $\Rightarrow$ hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ 3x^2 = 13 \end{cases}$ (loại)

+ Với y$\neq$0. Thay vào hệ đã cho ta được

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(ky)^2-3(ky)y+y^2=-1\\ 3(ky)^2-ky.y+3y^2=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2(k^2-3k+1)=-1\\ y^2(3k^2-k+3)=13\end{cases}$$

Vì $y \neq 0 \Rightarrow k^2-3k+1=(-1).\dfrac{3k^2-k+3}{13} \Leftrightarrow 13k^2 - 39k + 13 = -k^2 + k - 3$

$\Leftrightarrow 16k^2 - 40k + 16 = 0 \Leftrightarrow 4k^2 - 10k + 4 = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1=\dfrac{5+3}{4}=2\\ k_1=\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Với $k = 2 \Rightarrow \begin{cases}x=2y\\ y^2(2^2-3.2+1)=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2y\\ y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ y^2=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2\\ y^2=-1\end{cases}\end{array}\right.$

Với $k = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ hệ PT : $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}y^2\\ y^2\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-3.\dfrac{1}{2}+1\right]=-1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}\end{array}\right.$

Tóm lại hệ đã cho có 4 cặp nghiệm : (2,1); (-2,-1); (1,2); (-1,-2)

Dạng 4: ***Hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh.***

1. Khái niệm:

Một dạng hệ phương trình mở rộng của hệ phương trình đối xứng loại hai là hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh của các ẩn: $x_1, x_2,\dots, x_n$

$$\begin{cases}f(x_1)=g(x_2)\\ f(x_2)=g(x_3)\\ f(x_3)=g(x_4)\\ \dots\dots\dots\dots \ \dots\dots\dots\\ f(x_{n-1})=g(x_n)\\ f(x_n)=g(x_1)\end{cases}$$

2. Các tính chất cần sử dụng:

a) Tính chất 1:

Nếu hai hàm số f, g cùng tăng trên tập hợp A và $(x_1, x_2,\dots, x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình (I) ở đó $x_i \in A\ \forall i=\overline{1,n}$ thì $x_1= x_2=\dots= x_n$

Nhận xét: nếu f, g cùng giảm trên A $\Rightarrow$ tính chất ttrên vẫn đúng.

b) Tính chất 2:

Giả sử hàm số f giảm trên tập hợp A và $(x_1, x_2, \dots\dots\dots\dots, x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình (I), ở đó $x_i \in A\ \forall i = \overline{1,n}$ khi đó :

- Nếu u là số lẻ thì $x_1 = x_2 = \dots\dots\dots = x_n$
- Nếu n là số chẵn thì $x_1 = x_3 = \dots\dots\dots = x_{n-1}$
  $x_2 = x_4 = \dots\dots\dots = x_n$

Nhận xét: Tính chất trên vẫn đúng khi *f* là hàm số tăng.

3. *Ví dụ minh hoạ:*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-1)^2 = 2y \\ (y-1)^2 = 2z \\ (z-1)^2 = 2t \\ (t-1)^2 = 2x\end{cases}$

Giải :

Ta thấy $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$; $t \geq 0$.

Xét các hàm số: $f(u) = (u - 1)^2$; $g(u) = zu$ $(u \geq 0)$.

Ta có: $f'(u) = 2(u - 1)$; $g'(u) = 1 > 0 \quad \forall u \in R$

- Nếu $u > 1 \Rightarrow$ hai hàm số $f(u)$ và $g(u)$ đều tăng .

áp dụng tính chất (1) $\Rightarrow x = y = z = t = u$

- Nếu $0 \leq u \leq 1$ thì $f(u)$ là hàm số giảm, $g(u)$ là hàm số tăng

áp dụng tính chất (2) $\Rightarrow t = x$; $z = y$ khi ấy hệ trở thành

$$\begin{cases}(x-1)^2 = 2y \\ (y-1)^2 = 2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - 2x + 1 = 2y \\ y^2 - 2y + 1 = 2x\end{cases}$$

Trừ theo vế của hai phương trình này: $x^2 - y^2 = 0$ hay $x = y$ (vì $x \geq 0$; $y \geq 0$)

Tóm lại: Trong các trường hợp ta đều có : $x = y = z = t$ và đều bằng $u \geq 0$.

Với u là nghiệm không âm của phương trình:

$$(u - 1) = 2u \Leftrightarrow u^2 - 4u + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u = 2 - \sqrt{3} \\ u = 2 + \sqrt{3}\end{array}\right.$$

Ta được hai nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $\left[\begin{array}{l}x = y = z = t = 2 + \sqrt{3} \\ x = y = z = t = 2 - \sqrt{3}\end{array}\right.$

PHẦN II - MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHƯƠNG PHÁP 1: SỬ DỤNG PHÉP THẾ

1. ***Phương pháp*** **:**

Khi giải 1 hệ phương trình đôi khi ta biến đổi các phương trình của hệ để được biểu thức trong 1 phương trình có liên quan với vài phương trình rồi thay vào các phương trình đó để được hệ phương trình đã biết cách giải.

Chú ý:

Khi dùng phương pháp trên mà không dùng được phép biến đổi tương đương thì sau khi tìm được nghiệm của hệ phương trình hệ quả thì ta phải thử lại các nghiệm này có là nghiệm của hệ ban đầu hay không rồi kết luận.

2. ***Ví dụ*** **:**

Ví dụ 1: Giải hệ: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}} \\ \sqrt{xy} + \sqrt{y+1} + \sqrt{1-x} = 1 \end{cases}$ (I)

Giải:

Điều kiện: ($0 < x \le 1$ và $y > 0$) hoặc ($x = 0$; y tuỳ y).

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{1+y} = \sqrt{x} \\ \sqrt{xy} + \sqrt{y+1} + \sqrt{1-x} = 1 \end{cases}$$

thay (1) vào (2) ta được : $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$ (3)

$$(3) \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 1 - \sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 1 - x = 1 + x - 2\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 1.$$

i/ Với x = 0 thay vào (2) ta có : y = -1 do đó ta được $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

ii/ Với x = 1 thay vào (2) ta có : $\sqrt{y+1} + \sqrt{y} = 1$ (4) ;

vì x = 1 > 0 nên y > 0 vì thế VT(4) > 1

Thay bộ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ vào hệ ta thấy thỏa hệ . Kết luận hệ có nghiệm (0;-1)

Ví dụ 2: Giải hệ: $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$ (I)

Giải:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + xy)^2 = 2x + 9 \\ 2x.y = (6x + 6 - x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4}(x^2 + 6x + 6)^2 = 2x + 9 \\ 2x.y = (6x + 6 - x^2) \end{cases}$$ (cho kq)

Ví dụ 3: Giải hệ: $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$ (I)

Giải:

$$(I) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2(y^2+1)}{x^2+y^2} = \dfrac{3x}{5} \\ \dfrac{y^2(x^2-1)}{x^2+y^2} = \dfrac{4y}{5} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2(y^2+1)}{x^2+y^2} - \dfrac{y^2(x^2-1)}{x^2+y^2} = \dfrac{3x-4y}{5}$$

$\Rightarrow$ 3x - 4y = 5 hay x = $\dfrac{4y+5}{3}$ (j)

Cũng từ (I) cho: $3yx^2 - 3y = 4xy^2 + 4x$ (i); thế (j) vào (i) ta được:

$$\frac{y(4y+5)^2}{3} - 3y = \frac{4y^2(4y+5)}{3} + \frac{4(4y+5)}{3}$$

Thu gọn phương trình trên ta được phương trình bậc 2 ẩn y từ đó ta tìm được nghiệm (x;y) của hệ mới. Thay vào hệ ban đầu để kiểm tra đó có là nghiệm cần tìm không.

3. ***Bài tập tự giải :***

Giải các hệ phương trình:

1/ $\begin{cases} y^2 - 1 = 4x^2 + 4x \\ 4x^2 + y^2 - 3x.y = 1 \end{cases}$ 2/ $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3 \\ 4{,}5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} \sqrt{x-y+5} = 3 \\ \sqrt{x+y-5} = 11 - 2x \end{cases}$ 4/ $\begin{cases} \dfrac{x.y.z}{x+y} = 2 \\ \dfrac{x.y.z}{y+z} = 3 \\ \dfrac{x.y.z}{z+x} = 4 \end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP 2: SỬ DỤNG BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

1. ***Phương pháp :***

Đôi khi giải hệ ta biến đổi hệ bằng phép biến đổi tương đương để nhận được hệ cuối cùng đơn giản hơn.

Chú ý:

Khi dùng phương pháp này học sinh cần phải kiểm tra các phép biến đổi tương đương không hay hệ quả để thử lại.

2. ***Ví dụ :***

Ví dụ 1: Giải hệ: $\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 4x^2 + 2y^2 - 4x.y = 2 \end{cases}$ (I)

Giải:

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 2y^2 + 4x.y(1-y^2) = -1 \\ 4x^2 + 2y^2 - 4x.y = 2 \end{cases}$ (trừ vế với vế của 2 ptrình)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x.y(1-y^2) = (1-y^2)^2 \\ 4x^2+2y^2-4x.y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y^2 = 1 \\ 4x^2+2y^2-4x.y = 2 \end{cases}\right) \text{ hoặc } \left(\begin{cases} 1-y^2 = 4x.y \\ 4x^2+2y^2-4x.y = 2 \end{cases}\right)$$

Ví dụ 2: Giải hệ: $\begin{cases} (x^2+y^2-x.y)(x-y) = 1+y^3 \\ (x^2+y^2+x.y)(x+y) = 1-y^3 \end{cases}$ (I)

Giải:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2-x.y)(x-y) = 1+y^3 \\ (x^2+y^2+x.y)(x+y)(x^2+y^2-x.y)(x-y) = (1-y^3)(1+y^3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2-x.y)(x-y) = 1+y^3 \\ (x^3+y^3)(x^3-y^3) = 1-y^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2-x.y)(x-y) = 1+y^3 \\ x^6 = 1 \end{cases}$$

3. *<u>Bài tập tự giải</u> :*

Giải các hệ phương trình:

1/ $\begin{cases} \sqrt{2-3x} - 1 = \sqrt{5y-3x} \\ \sqrt{1-5y} + \sqrt{5y-3x} = 5 \end{cases}$

2/ $\begin{cases} x^2 - x.\sqrt{1-y^4} = 1 \\ x.\sqrt{1-y^4} + y^4 = 2 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} \dfrac{x - y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = 2 \\ \dfrac{y - x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = \dfrac{7}{4} \end{cases}$

4/ $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3(x+y)} \\ 4x^3+6x^2+4x+1 = 15y^4 \end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP 3: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

1. *<u>Phương pháp</u> :*

Khi giải 1 hệ phương trình ta thường biến đối các phương trình 1 cách hợp lý để nhận được hệ mới mà các phương trình có các biểu thức chứa ẩn chung để dùng ẩn phụ và dẫn tới hệ mới (với ẩn mới) dễ tìm được nghiệm hơn.

Chú ý:

Thông thường ta dùng số ẩn phụ của phương trình mới và cũ bằng nhau.

2. ***<u>Ví dụ</u> :***

Ví dụ 1: Giải hệ: $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{y}{y^2+1} = \dfrac{2}{3} \\ (x+y)(1+\dfrac{1}{xy}) = 6 \end{cases}$ (I)

Giải:

Điều kiện: x; y $\neq 0$

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+y)(1+x.y)}{(x^2+1)(y^2+1)} = \dfrac{2}{3} \\ (x+y)(1+xy) = 6xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9x.y}{(x^2+1)(y^2+1)} = 1 \\ (x+y)(1+xy) = 6xy \end{cases}$$

Đặt t = $\dfrac{x}{1+x^2}$; z = $\dfrac{y}{1+y^2}$ thì t; z$\in[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}]$. Ta có: hệ $\begin{cases} 9t.z = 1 \\ t+z = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Ví dụ 2: Giải hệ: $\begin{cases}(x^2+y^2)(1+\dfrac{1}{x.y})^2=9\\(x^3+y^3)(1+\dfrac{1}{x.y})^3=27\end{cases}$ (I)

Giải :

$$(\mathrm{I})\Leftrightarrow\begin{cases}(x+\dfrac{1}{y})^2+(y+\dfrac{1}{x})^2=9\\(x+\dfrac{1}{y})^3+(y+\dfrac{1}{x})^3=27\end{cases}$$

Đặt u= x+$\dfrac{1}{y}$; v= y+$\dfrac{1}{x}$ ta có: $\begin{cases}u^2+v^2=9\\u^3+v^3=27\end{cases}$ đặt S = u + v; P = u.v

với $S^2\geq 4P$ và $\begin{cases}S^2-2P=9\\S^3-3SP=27\end{cases}$.

Ví dụ 3: Giải hệ: $\begin{cases}x^2(y+z)^2=(3x^2+x+1).y^2.z^2\\y^2(x+z)^2=(4y^2+y+1).x^2.z^2\\z^2(y+x)=(5z^2+z+1).y^2.x^2\end{cases}$ (I)

Giải:

- Nếu hệ nhận x = 0 là nghiệm thì ta được y = 0 hoặc z = 0
  Rõ ràng các bộ (0; 0; t); (0; t; 0); (t; 0; 0) với mọi t đều là nghiệm của hệ .
- Xét $x.y.z\neq 0$ thì

$$(\mathrm{I})\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^2=3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\\\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)^2=4+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2}\\\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)^2=5+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}\end{cases}.$$

Đặt $u=\dfrac{1}{x};v=\dfrac{1}{y};t=\dfrac{1}{z}$. Ta có: $(\mathrm{I})\Leftrightarrow\begin{cases}(v+t)^2=3+u+u^2\\(u+t)^2=4+v+v^2\\(u+v)^2=5+t+t^2\end{cases}$ (II)

Lấy (2) - (3) ta được: (t - v)(2u + t + v) = (v - t)(v + t + 1) - 1
hay (v - t)[2(u + v + t) + 1] = 1
Lấy (1) - (2) ta được: (u - v)(u + v + 2t) = (v - u)(v + u + 1) – 1
hay (v - u)[2(u + v + t) + 1] = 1
Do đó: v – t = v - u hay u = t

3. *<u>Bài tập tự giải</u> :*

Giải các hệ phương trình sau :

1/ $\begin{cases}7(x^5+y^5)=31(x^3+y^3)\\x^2+xy+y^2=3\end{cases}$

2/ $\begin{cases}(x+y)(1+\dfrac{1}{xy})=4\\xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x^2+y^2}{xy}=4\end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP 4: SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ VI-ET

1. *Phương pháp* :

1/ Nếu $\begin{cases} x + y = s \\ x.y = p \end{cases}$

với s; p cho trước thì x; y là nghiệm phương trình $t^2 - s.t + p = 0$.

2/ Nếu $\begin{cases} x + y + z = s_1 \\ x.y + y.z + xz = s_2 \\ x.y.z = s_3 \end{cases}$

với s_1; s_2; s_3 cho trước thì x; y; z là nghiệm phương trình $t^3 - s_1.t^2 + s_2.t - s_3 = 0$

Chú ý:

Khi giải 1 hệ phương trình đối xứng loại I , đôi khi hệ có chứa một vài tổng đối xứng cơ bản thì ta thường nghĩ đến việc biến tổng đổi để đưa về hệ mới xuất hiện đầy đủ các tổng đối xứng cơ bản đối với các ẩn đang xét rồi dùng định lí Vi-et đảo .

2. *Ví dụ* :

Ví dụ 1: Giải hệ: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xyz = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases}$ (I).

Giải:

Từ (I) cho : $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xyz = 6 \\ xy + yz + xz = 11 \end{cases}$

nên x; y; z là nghiệm của phương trình : $t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$

Töø ñoù: (x; y; z) = (1; 2; 3) vaø caùc hoán vò cuûa noù .

Ví dụ 2: Giaûi heä: $\begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 10 & (2) \\ x^7 + y^7 + z^7 = 350 & (3) \end{cases}$ (I)

Giaûi*:*

(1) $\Leftrightarrow (x + y + z)^3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 0$

do (2) neân coù: xy + yz + zx = -5

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} -(x + y) = z & (a) \\ xy + yz + xz = -5 & (b) \\ x^7 + y^7 - (x + y)^7 = 350 & (i) \end{cases}$

(i) $\Leftrightarrow -xy(x + y)(x^2 + xy + y^2) = 50$ (ii)

Thay (a) vaøo (b) ta coù: $x^2 + y^2 + x.y = 5$ töø ñoù: x.y.z = 2

x; y; z laø n_0 cuûa phương trình: $t^3 - 5t - 2 = 0$

suy ra : (x;y;z) =(-2;1-$\sqrt{2}$;1+$\sqrt{2}$) vaø caùc hoán vò cuûa noù.

Ví dụ 2:   Giai he: $\begin{cases} x+y=\dfrac{2}{z} \\ y+z=\dfrac{2}{x} \\ z+x=\dfrac{2}{y} \end{cases}$ (I)

Giải:

Ñat S = x + y + z ; u = x.y + y.z + x.z ; P = x.y.z thì tö (I) có x.y.z = P $\neq$ 0 va

$$\begin{cases} 2S=2(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}) \\ 2t=6 \\ (x+y)(y+z)(z+x)=\dfrac{8}{P} \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Ma (x + y)(y + z)(x + z) = 2xyz + x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(x + y)

= 2P + 2x + 2y + 2z = 2P + 2S

Do ño: P + S = 4/P tö he (II) cho S = t.P nen S = 3P va 4P = 4/P

3. *<u>Bài tập tự giải</u>* :

Giải các hệ phương trình sau :

1/ $\begin{cases} x+y+z=-4 \\ xyz=18 \\ x^2+y^2+z^2=22 \end{cases}$ 2/ $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^3+y^3-z^3=7 \\ x^2+y^2-z^2=9 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} xz+xy=x^2+2 \\ xy+yz=y^2-3 \\ xz+yz=z^2+4 \end{cases}$ 4/ $\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ x^2+4y^2+9z^2=189 \\ 4y^2=3x.z \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP 5: DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC

1. <u>Dung bat ñang thöc Cauchy:</u>

Cho n số không âm $x_1;x_2;\ldots;x_n$ ta có: $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $x_1=x_2=\ldots=x_n$)

Khi dùng bất đẳng thức để giải hệ phương trình (nếu được ta thường dự đoán nghiệm của phương trình và đó chính là các điểm rơi của các bất đẳng thức)

Ví dụ 1:   Giải hệ: $\begin{cases} x+y^2+z^3=11 \\ x.y.z=6.\sqrt[6]{108} \\ x,y,z>0 \end{cases}$ (I)

Giải:

Theo bất đ thức Cauchy cho 11 số dương gồm 6 số $\dfrac{x}{6}$; 3 số $\dfrac{y^2}{3}$, 2 số $\dfrac{z^3}{2}$ ta có:

$$x+y^2+z^3 \geq 11.\sqrt[11]{\left(\frac{x}{6}\right)^6.\left(\frac{y^2}{3}\right)^3.\left(\frac{z^3}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{x^6}{6^6}.\frac{y^6}{3^3}.\frac{z^6}{2^2} \leq 1$$

Do đó: x.y.z $\le 6.\sqrt[6]{108}$ (dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{6}=\frac{y^2}{3}=\frac{z^3}{2}$)

Vậy hệ tương đương:

$$\begin{cases} x, y, x > 0 \\ x = 6k \\ y^2 = 3k \\ z^3 = 11k \\ x.y.z = 6.\sqrt[6]{108} \\ x + y^2 + z^3 = 11 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm là x = 6; y = $\sqrt{3}; z = \sqrt[3]{2}$.

Ví dụ 2: Giải hệ: $\begin{cases} 2x^2 = y(x^2+1) \\ 3y^3 = z(y^4+y^2+1) \\ 4z^4 = x(z^6+z^4+z^2+1) \end{cases}$ (I)

Giải:

Gọi (x; y; z) là nghiệm của hệ.

- Khi x=0 thay vào hệ ta được y $= z = 0$. Nghiệm của hệ (0;0;0)
- Khi x$\neq$0 thì từ (1) cho y > 0 nên z > 0 và như vậy x > 0 .

Dùng bđt Cauchy: $2x^2 = y(x^2 + 1) \ge 2x.y \Rightarrow x \ge y$

Tương tự: $3y^3 = z(y^4 + y^2 + 1) \ge 3z.y^2 \Rightarrow y \ge z, z \ge x$.

Do đó: x = y = z .Từ đó tìm được nghiệm của hệ .

2. *<u>Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski</u>:*

Cho 2 bộ số $x_1;x_2;\ldots;x_n$ và $y_1;y_2;\ldots;y_n$ ta có: $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k.y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $x_1 = t.y_1$; $x_2 = t.y_2$; …; $x_n = t.y_n$) với t =const

Ví dụ 1: Giải hệ: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 = -3 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y = 24 \end{cases}$ (I)

Giải:

Từ (I) cho : $\sqrt{x} + \sqrt{32-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} = y^2 - 6y + 21$ (1).

NX: $y^2 - 6y + 21 \ge 12$ với $\forall$ y nên ta nghĩ đến bđt:

$\sqrt{x} + \sqrt{32-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} \le 12$; $\forall x \in [0;32]$ điểm rơi là x = 16

Thật vậy: $\sqrt{x} + \sqrt{32-x} \le \sqrt{2(32)} = 8$.

$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} \le \sqrt{2(\sqrt{x} + \sqrt{32-x})} \le 4$

Cộng các bđt trên lại suy ra kết quả.

Ví dụ 2: Giải hệ: $\begin{cases} \sqrt{5-x^2} + \sqrt{5-\frac{1}{x^2}} - y^2 = 3 \\ \frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}) + 2y = 3 \end{cases}$ (I)

Giải:

Điều kiện: $\frac{1}{\sqrt{5}} \le |x| \le \sqrt{5}$.

Cộng 2 pt ta được: $\sqrt{5-x^2}+\sqrt{5-\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}) = y^2 - 2y + 6$ (3)

Áp dụng Bđt B-C-S cho 2 bộ: 1; $\frac{1}{2}$ và $\sqrt{5-x^2}$; x :

$(\sqrt{5-x^2}+\frac{1}{2}x)^2 \le \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{5-x^2}+\frac{1}{2}x \le \frac{5}{2}$ tương tự: $\sqrt{5-\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{2x} \le \frac{5}{2}$

nên: $\sqrt{5-x^2}+\sqrt{5-\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}) \le 5$ lại có: $y^2 - 2y + 6 \ge 5$

suy ra nghiệm

Ví dụ 3: Giải hệ: $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{(1-y)(1-x^2)}}+\dfrac{y}{\sqrt{(1-x)(1-y^2)}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{(1-x^2)(1-y^2)}} \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{(1-x^2)(1-y^2)}} \end{cases}$ (I)

Giải:

Điều kiện: $-1 < x ; y < 1$.

$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 \end{cases}$ từ đó: $\begin{cases} x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}>0 \\ x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}>0 \end{cases}$

Ta có $x.\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2} \le \sqrt{(x^2+1-x^2)(y^2+1-y^2)} = 1$

Do đó:

$$x.\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

Bđt B-C-S cho : $x.\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x} \le \sqrt{(x^2+y^2)(x+y+2)}=\sqrt{x+y+2}$

Mà $\sqrt{x+y+2} \le \sqrt{\sqrt{(1+1)(x^2+y^2)}+2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ nên :

$x.\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x} \le \sqrt{2+\sqrt{2}}$

Do đó: $x.\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=\sqrt{2+\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1+y}}=\dfrac{y}{\sqrt{1+x}} \\ x^2+y^2=1 \\ x=y \end{cases}$

và do đó: $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (thử lại)

3. *<u>Dùng tính có nghiệm của tam thức</u>:*

Cho tam thức $f(t) = a.t^2 + bt + c$ với $a \neq 0$ có $\Delta = b^2 - 4.a.c$

i/ Phương trình f(t) = 0 (ẩn t) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0$

ii/ Khi f(t) có chứa một số ẩn khác hoặc ẩn t có miền giá trị không là tập R thì điều kiện $\Delta \ge 0$ chỉ là điều kiện cần để hệ có nghiệm nhưng đôi khi dùng điều kiện này ta thu hẹp được miền giá trị các ẩn còn lại làm cho việc tìm nghiệm của hệ thuận lợi hơn.

Ví dụ 1: Giải hệ: $\begin{cases}(x+3)^3 = 3-2y\\ z^2+4y^2 = 8y\\ (2z-x)(x+3) = 5x+16\\ z \ge 0\end{cases}$ (I)

Giải:

Từ (2) và (3) cho: $4(y - 1)^2 = 4 - z^2$ nên $|z| \le 2$ và $x^2 + 2(4 - z).x + 16 - 6z = 0$ (5)

Từ (5) phải có: $\Delta_x = z^2 - 2z \ge 0$ nên $z \le 0$ hoặc $z \ge 2$

Từ các kết quả trên cho z = 0 hoặc z = 2 (thử lại) .

Ví dụ 2: Giải hệ: $\begin{cases}x+y+z = 2\\ 4x+4y-2x.y+z^2 = 4\end{cases}$ (I)

Giải:

Coi z là tham số của (I). (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}x+y = 2-z\\ xy = \dfrac{4-4z+z^2}{2}\end{cases}$

do đó: x; y là nghiệm phương trình : $t^2 - (2 - z)t + \dfrac{(z-2)^2}{2} = 0$ (2)

Do tính có nghiệm của pt (2) nên $\Delta = (z - 2)^2 - 2(z - 2)^2 \ge 0$ nên z = 2

Như vậy (I) $\Leftrightarrow \begin{cases}z = 2\\ x.y = 0\\ x+y = 0\end{cases}$ cho ta nghiệm của hệ.

Bài tập tự giải:

Giải các hệ phương trình sau:

1/ $\begin{cases}x+y+z = 3\\ x^4+y^4+z^4 = x^3+y^3+z^3\end{cases}$

2/ $\begin{cases}x, y, z > 0\\ x.y.z = 1\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\end{cases}$

3/ $\begin{cases}x, y, z > 0\\ x+y+z = 3\\ \sqrt{x^2+2yz+6}+\sqrt{y^2+2zx+6}+\sqrt{z^2+2x.y+6} = 9\end{cases}$

4/ $\begin{cases}x, y, z > 0\\ x+y+z = 6\\ \dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{z^2}+\dfrac{z}{x^2} = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP 6: SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU HÀM SỐ

Cho ham so y = f(x) lien tuc va ñôn ñieu tren khoang (a;b). Khi đó:

He $\begin{cases} f(x) = f(y); x, y \in (a;b) \\ H(x;y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \in (a;b) \\ H(x;x) = 0 \end{cases}$

1. ***Phương pháp:***

Khi giải hệ ta có thể nghĩ đến phép biến đổi tương đương để đưa hệ về hệ mới có một phương trình dạng f[u(x)] = f[v(y)] ; ở đó f(t) là hàm số đơn điệu trên khoảng (a;b) và u(x); v(y) có miền trị là (~;) $\subset$(a;b)

2. ***Ví dụ :***

Ví dụ 1: Giải hệ: $\begin{cases} (3x+1).\sqrt{9y^2+6y+2}+7y+1=-4x.\sqrt{16y^2+1} \\ 2012^x - 2012^y = (\log_3 y - \log_3 x).(12+4x.y) \end{cases}$ (I)

Giải:

Điều kiện: x; y > 0.

Xét phương trình (2): Do đk nên 12 + 4x.y > 0

Nếu x > y thì VT(2) > 0 và VP(2) < 0 nên (2) không thể xảy ra.

Nếu x < y thì VT(2) < 0 và VP(2) > 0 nên (2) không thể xảy ra.

Do đó:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (3x+1)\sqrt{9x^2+6x+2}+7x+1=-4x.\sqrt{16x^2+1} \end{cases} \quad (II)$$

Xét phương trình (2) của hệ (II)

(2) $\Leftrightarrow$ (3x + 1)[1+$\sqrt{(3x+1)^2+1}$] = -4x.[1+$\sqrt{16x^2+1}$] (3)

Xét hàm số g(t) = t[1 + $\sqrt{t^2+1}$] có $g'(t) = 1+\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} > 0 \ \forall t \in R$

Suy ra g(t) đồng biến trên R do đó

(3)$\Leftrightarrow$ g(3x + 1) = g(-4x) $\Leftrightarrow$ x = -1/7 (loại)

Vậy hệ đã cho vô nghiệm .

Ví dụ 2: Giải hệ: $\begin{cases} \log_7\left(\dfrac{x^2+2y+5}{y}\right) = 3(y+x^2)-15+\log_7 3 \\ 2\sqrt[4]{y^2-10y+24}+\sqrt{y-6} = 2\sqrt{x^2+1}+\sqrt[4]{x^4-1} \end{cases}$ (I)

Giải :

Xét phương trình (1) của hệ

Điều kiện: $\begin{cases} |x| \geq 1 \\ y \geq 6 \end{cases}$.

(1)$\Leftrightarrow$ $\log_7(x^2+2y+5)$ +3(x^2+2y+5) = $\log_7 3y$ +9y .

Xét hàm số : f(t) = $\log_7 t$ + 3t đồng biến trên (0;+∞) .

(1)$\Leftrightarrow$ f(x^2 + 2y + 5) = f(3y) với x^2 + 2y + 5 , y > 0

Nên x^2 + 2y + 5 = 3y hay y = x^2 + 5 thay y = x^2 + 5 vào pt (2) ta được:

$$\sqrt[4]{x^4-1}+2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2-1}+2.\sqrt[4]{x^4-1} \quad (3)$$

(3)$\Leftrightarrow$ u + 2 = u^2 + 2u với u = $\sqrt[4]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}} \geq 0$

Giải phương trình trên ta được nghiệm u = -2 (loại) hoặc u = 1 .

Với u = 1: $\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}=1$ vô nghiệm do đó hệ vô nghiệm .

Ví dụ 3: Giải hệ : $\begin{cases}\cos x=\log_2(8.\cos z-\cos 2x-5)\\ \cos y=\log_2(8.\cos x-\cos 2y-5)\\ \cos z=\log_2(8.\cos y-\cos 2z-5)\end{cases}$.

Giải :

Xét phương trình (1) ta có điều kiện có nghiệm: 8cosz - cos2x – 5 > 0

$\Rightarrow 8\cos z>\cos 2x+5\geq 4,$ nên cosz$\in(\frac{1}{2},1]$, tương tự: cosx,cosy$\in(\frac{1}{2},1]$

Đặt : u = cosx , t = cosy , m = cosz . u, t, m $\in(\frac{1}{2},1]$.

Ta được: $\begin{cases}u=\log_2(8m-2u^2-4)\\ t=\log_2(8u-2t^2-4)\\ m=\log_2(8t-2m^2-4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8m=2^u+2u^2+4\\ 8u=2^t+2t^2+4\\ 8t=2^m+2m^2+4\end{cases}$.

Xét hàm số f(s) = $2^s + 2.s^2 + 4 \Rightarrow f'(s) = 2^s.\ln 2 + 4s > 0$, $\forall s\in(\frac{1}{2},1]$.

Hệ thành $\begin{cases}8m=f(u)\\ 8u=f(t)\\ 8t=f(m)\end{cases},u,t,m\in(\frac{1}{2},1]$. Mà f tăng nên m = u = t .

Do đó : $8t = 2^t + 2t^2 + 4$; $t\in(\frac{1}{2},1]$ suy ra t = 1 .

Ví dụ 4: Giai he: $\begin{cases}3^{x^2+2}-9^{2y^2+1}=2\left(\sqrt{2y}-\sqrt{x}\right)\\ 3^{(x+y)^2+2}+2\sqrt{x+y}=29\end{cases}$ (I)

Giải:

(I) $\Leftrightarrow\begin{cases}3^{x^2+2}+2\sqrt{x}=3^{4y^2+2}+2.\sqrt{2y}(1)\\ 3^{(x+y)^2+2}+2\sqrt{x+y}=29\end{cases}$.

Điều kiện: x, y > 0.

Xet ham so g(t) = $3^{t^2+2}+2\sqrt{t}$; t$\in(0;+\infty)$ ñong bien tren $\in(0;+\infty)$

(I)$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=f(2y)\\ f(x+y)=f(1)\\ x;2y\in(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\in(0;+\infty)\\ x+y=1\end{cases}$ suy ra kết quả.

Ví dụ 5: Giai he: $\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-y}=e^{\cos x-\cos y}\\ y=\sqrt{2x-x^2}-1\end{cases}$ (I)

Giai:

Ñat z = -y thì: $\begin{cases} \dfrac{1+x}{1+z} = e^{\cos x - \cos z} \\ z = 1 - \sqrt{2x - x^2} \end{cases}$ nên pt (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} z \le 1 \\ (x-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$

Tö ño: x; z $\in$ [0;2] nen (1) $\Leftrightarrow$ ln(x + 1) – cosx = ln(z + 1) - cosz $\Leftrightarrow$ g(x) = g(z)

Xét hàm số g(t) = ln(t + 1) - cost ñong bien tren [0;2] nen x = z

do ño $x = z = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. *Bài tập tự giải:*

Giai các hệ phương trình:

1/ $\begin{cases} x - y = (\log_2 y - \log_2 x)(2 + xy) \\ x^3 + y^3 = 16 \end{cases}$

2/ $\begin{cases} 2^x - 2^y = (y - x)(xy + 2) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} e^x - e^y = (\log_2 y - \log_2 x)(xy + 1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

4/ $\begin{cases} \sin x - \sin y = x - y \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$

5/ $\begin{cases} (3y^2)^{\log_3 2} - x^{\log_5 3} = x \\ \left(5x^2\right)^{\log_5 2} - y^{\log_3 5} = y \end{cases} \quad (I)$

6/ $\begin{cases} y + \ln x = 1 \\ e^{y-1} + \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} = 1 \\ \sqrt{x-1} + \log_2\left(y^2 + 1\right) = 1 \end{cases}$.

PHƯƠNG PHÁP 7: HỆ LẶP

Dạng : $\begin{cases} y = g(x) \\ x = g(y) \\ x; y \in (a;b) \end{cases}$ (I) ; $\begin{cases} y = g(x) \\ z = g(y) \\ x = g(z) \\ x; y; z \in (a;b) \end{cases}$ (II)

1. ***Phương pháp*** :

Với *g(t)* là hàm số đồng biến trên khoảng (a;b) ta thực hiện:

i/ Xét 2 ẩn bất kì x; y của hệ nhờ tính đồng biến của hàm *g* ta dùng phản chứng để chứng minh x = y

ii/ Lập luận tương tự cho cặp biến khác và như trên nên hệ tương đương:

$\begin{cases} y = g(x) \\ x = g(y) \\ x; y \in (a;b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = g(y) \\ x; y \in (a;b) \end{cases}$; $\begin{cases} y = g(x) \\ z = g(y) \\ x = g(z) \\ x; y; z \in (a;b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x \\ x; y; z \in (a;b) \end{cases}$

Chú ý:

Đôi khi ta phải dùng ẩn phụ để đưa về hê lặp hoặc từ các điều kiện ràng buộc của hệ ta thu hẹp miền ẩn x; y;… chạy trên 1 miền mới mà *g* đồng biến trên đó.

2. *Ví dụ* :

Ví dụ 1: Giai he: $\begin{cases} x^3 + 1 = 2(x^2 - x + y) \\ y^3 + 1 = 2(y^2 - y + x) \end{cases}$ (I)

Giai:

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 2y \\ y^3 - 2y^2 + 2y + 1 = 2x \end{cases}$ (II)

Xet hàm so f(t) = $t^3 - 2t^2 + 2t + 1$; $t \in R$ thì $f'(t) = 3t^2 - 4t + 2 > 0$ với $\forall t \in R$ $\Rightarrow$ f(t) ñong bien tren (-∞; +∞) suy ra x = y.

Do ño: $x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ suy ra kết quả .

Ví dụ 2: Giai he: $\begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 18 = y^3 + y \\ 2y^3 + 3y^2 - 18 = z^3 + z \\ 2z^3 + 3z^2 - 18 = x^3 + x \end{cases}$ (I).

Giai:

Ñat $f(t) = 2t^3 + 3t^2 - 18$; $g(t) = t^3 + t$. g ñong bien tren R

He thanh : $\begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \, (II) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$

Co the coi x = max$\{x; y; z\}$ thì g(x)≥g(y) va g(x)≥g(z).

Do ño: $\begin{cases} g(x) \geq f(x) \\ f(z) \geq g(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+5x+9) \leq 0 \\ (z-2)(z^2+5z+9) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ z \geq 2 \end{cases}$

Vay : x = z = 2 va y = 2 (thö lai)

Ví dụ 3: Giải hệ: $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(® x_2) \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(® x_3) \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(® x_4) \\ x_4 = \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(® x_1) \end{cases}$ (I) .

Giải:

$\forall k$ =1;2;3;4 thì $|x_k| \leq \frac{\sqrt{3}}{9} < \frac{1}{2}$ do đó: $|® x_k| < \frac{®}{2} \Rightarrow 0 < \cos(® x_k) \leq 1$ mọi k .

Tö he ta có $0 < x_k < \frac{1}{2}$ vì the $0 < ® x_k < \frac{®}{2}$

Nếu $x_1 \geq x_3 \Rightarrow ® x_1 \geq ® x_3$ do ño: $\cos(® x_1) \leq \cos(® x_3)$ nên $x_4 \leq x_2$

$\Rightarrow \cos(® x_4) \geq \cos(® x_2) \Rightarrow x_3 \geq x_1$ nên $x_3 = x_1$ (tương tự cho $x_1 \leq x_3$)

Nên $x_1 = x_3$ thay vào hệ được $x_2 = x_4$.

Từ đó: $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(® x_2) \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(® x_1) \end{cases}$ và $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

Xét $f(t) = t + \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(® t)$ với $t \in (0; \frac{®}{2}]$ thì $f'(t) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{9} ® \sin(® t) \geq 1 - \frac{\sqrt{3}}{9} > 0$

Vậy f đồng biến trên $(0;\frac{\circledR}{2}]$.

Do: $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 \;\Rightarrow\; x_1 + \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\circledR x_1) = x_2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\circledR x_2)$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ trên $(0;\frac{\circledR}{2}]$ từ đó: $x_1 = x_2$. Ta có: $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\circledR x_1)$ (9)

Ta thấy : Vt(9) là hàm số đồng biến còn Vp(9) là hàm số nghịch biến trên $(0;\frac{\circledR}{2}]$ nên (9) có tối đa 1 nghiệm là $x_1 = \frac{1}{6}$.

Ví dụ 4: Giải hệ: $\begin{cases} x^3 + x^2 - 1 = 2y^3 - 2x \\ y^3 + y^2 - 1 = 2z^3 - 2y \\ z^3 + z^2 - 1 = 2x^3 - 2z \end{cases}$ (I)

Giải:

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 + 2x = 2y^3 + 1 \\ y^3 + y^2 + 2y = 2z^3 + 1 \\ z^3 + z^2 + 2z = 2x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$$ v

Với $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ và $g(t) = 2t^3 + 1$, g và f cùng đồng biến trên R.
Xét (x;y;z) là nghiệm của hệ. Giả sử : $x \ge y$ thì $f(x) \ge f(y)$ nên $g(y) \ge g(z)$ do đó: $y \ge z \Rightarrow f(y) \ge f(z)$. Từ hệ cho $g(z) \ge g(x) \Rightarrow z \ge x$ từ đó: $x = y = z$.

Tương tự khi $x \le y$.

$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ h(x) = 0 \end{cases}$ (II) với $h(t) = t^3 - t^2 - 2t + 1$ liên tục trên R và $h(-2) < 0$; $h(0) > 0$; $h(1) < 0$; $h(2) > 0$ nên phương trình $h(t) = 0$ có đúng 3 nghiệm thuộc (-2; 2). Đặt $x = 2.\cos u$; $u \in (0;\circledR)$

Do đó: $8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1 = 0$

do $\sin u \ne 0$ nên $\sin u(8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin 4u = \sin 3u$

Tìm được nghiệm $u \in \left\{\frac{\circledR}{7}; \frac{3\circledR}{7}; \frac{5\circledR}{7}\right\}$.

Ví dụ 5: Giải hệ: $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 6}.\log_3(6 - y) = x \\ \sqrt{y^2 - 2y + 6}.\log_3(6 - z) = y \\ \sqrt{z^2 - 2z + 6}.\log_3(6 - x) = z \end{cases}$ (I)

Giải:

Điều kiện: x, y, z < 6 .

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(6 - y) = x/\sqrt{x^2 - 2x + 6} \\ \log_3(6 - z) = y/\sqrt{y^2 - 2y + 6} \\ \log_3(6 - x) = z/\sqrt{z^2 - 2z + 6} \end{cases} \quad (\mathrm{II})$$

Xét hàm số f(t) = $\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+6}}$; $\forall$ t < 6 ; f(t) tăng trên $(-\infty;6)$

g(t) = $\log_3(6-t)$ giảm trên $(-\infty;6)$

Có thể coi x = $\max\{x;y;z\}$.

+ Th1: $x \ge y \ge z$ thì f(x)$\ge$ f(y)$\ge$f(z) từ giả thiết cho g(y)$\ge$ g(z)$\ge$ g(x)

$\Rightarrow$y$\le$z$\le$x nên y = z

Do đó: trong pt (2) của hệ cho f(y) = g(y) mà f(3)=g(3).

nên y = z = 3 thế vào hệ ta được $\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}$ = 1 suy ra x = 3 .

+ Th2: $x \ge z \ge y$ làm tương tự cho x = y = z = 3 .

3. ***Bài tập tự giải:***

Giai các hệ phương trình:

1/ $\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0 \\ z^3-9y^2+27y-27=0 \\ x^3-9z^2+27z-27=0 \end{cases}$

2/ $\begin{cases} 3x+\ln(x^2-x+1)=y-x^3+3 \\ 3y+\ln(y^2-y+1)=z-y^3+3 \\ 3z+\ln(z^2-z+1)=x-z^3+3 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6}.\log_3(6-y)=x \\ \sqrt{y^2-2y+6}.\log_3(6-z)=y \\ \sqrt{z^2-2z+6}.\log_3(6-x)=z \end{cases}$

4/ $\begin{cases} y=\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{1-x}} \\ z=\dfrac{y}{\sqrt{y}+\sqrt[4]{1-y}} \\ x=\dfrac{z}{\sqrt{z}+\sqrt[4]{1-z}} \end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP 8: LƯỢNG GIÁC HÓA

1. Phương pháp :

Trong khi giải hệ phương trình đôi khi từ những biểu thức chứa ẩn của hệ ta sử dụng đặt ẩn phụ để đưa về hệ phương trinh chứa biểu thức lượng giác đơn giản hơn hệ ban đầu

Chú ý:

Miền trị của biểu thức sint; cost khi t chạy trên [a;b] với b – a $\ge$ 2® là [-1; 1] nên nếu muốn đặt x = sint (chẳng hạn thì ta phải chứng minh x$\in$ [u;v]$\subset$[-1;1]

2. ***Ví dụ:***

Ví dụ 1: Giai he: $\begin{cases} x^2+x.y+x=1 \\ y^2+xy+x+y=1 \\ x;y>0 \end{cases}$ (I)

Giai:

do x; y > 0 nen tö (1) cho 0 < x; y < 1

+ x = 0 khong thoa he. Do ño, neu (x; y) nghiệm cua he thì x$\ne$0

(I)$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1-x-x^2}{x} \\ (y+1)(x+y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{x}-x-1 \\ (\dfrac{1}{x}-x)(\dfrac{1}{x}-1)=1 \end{cases}$

do ño: $x^3 - 2x^2 – x + 1 = 0$ (3)

Xet hàm so f(x) = $x^3 - 2x^2 – x + 1$ lien tuc tren [0;1]

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 = 3(x^2 - x) – x - 1 < 0$; $\forall x \in [0;1]$

va f(1/2). f(1) < 0 nen pt (3) co nghiệm duy nhat u $\in \left(\frac{1}{2};1\right)$ do ño:

$(\frac{1}{u} - u)(\frac{1}{u} - 1)$ =1 hay $\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u}$ -1 + u = 1 (4) ;

ñat u = $\frac{1}{2\cos t}$; 0 < t < $\frac{®}{3}$ thay vao (4) ta ñöôc:

$8\cos^3 t - 4\cos^2 t - 4\cos t + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3t - 2\cos 2t + 2\cos t - 1 = 0$ (5)

do sint $\neq$ 0 nen (5) $\Leftrightarrow$ 2sint.cos3t - 2sint.cos2t + 2sint.cost - sint = 0

hay sin4t = sin3t $\Leftrightarrow$ (t = 2k®) $\vee$ (t = $\frac{®}{7} + k\frac{2®}{7}$) vôi k $\in$ Z .

Do 0 < t < $\frac{®}{3}$ nen t = $\frac{®}{7} \Rightarrow$ u = $\frac{1}{2\cos\frac{®}{7}}$ do ño:

$$y = \frac{1}{u} - u - 1 = \frac{2\cos\frac{®}{7} - 1}{4\cos^2\frac{®}{7}} .$$

Ví dụ 2: Giải hệ : $\begin{cases} (x-y)(x^2+x.y) - 6.\ln\dfrac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}} = y^3 - xy^2 + 2x - 2y \\ x^3 - 2x + 1 = y^2 \end{cases}$ (I)

Giải:

Pt(1) $\Leftrightarrow x^3 - 2x + 6\ln(x + \sqrt{x^2+9}) = y^3 - 2y + 6\ln(y + \sqrt{y^2+9})$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t + 6\ln(t + \sqrt{t^2+9})\ \forall t \Rightarrow f'(t) = 3[t^2 + \frac{2}{\sqrt{t^2+9}} - \frac{2}{3}]$

Bđt Cauchy : $\frac{t^2+9}{27} + \frac{1}{\sqrt{t^2+9}} + \frac{1}{\sqrt{t^2+9}} + \frac{26}{27}(t^2+9) \geq 1 + \frac{26}{27}(t^2+9) \geq \frac{29}{3}$

$\Rightarrow f'(t) > 0$ với mọi t nên f tăng trên R . Từ (3) cho x = y.

Thay vào (3) cho : $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. Xét hàm số $g(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.

Ta có: g(-2). g(0) < 0; g(0).g(1) < 0; g(1).g(2) < 0 và g liên tục trên R;

degg = 3 nên pt g(x) = 0 có đúng 3 nghiệm trên (-2;2) .

Gọi x là nghiệm của g(x) = 0 thì $\exists u \in (0;®)$ để 2cosu = x .

Thay vào pt đồng thời nhân vế với sinu ta được: sin4u = sinu

ĐS: x = y = $2\cos\frac{®}{7}$; x = y = $2\cos\frac{3®}{7}$; x = y = $2\cos\frac{5®}{7}$.

Ví dụ 3: Giải hệ: $\begin{cases} (x^2+xy)(y+2z)=\dfrac{1}{8} \\ x^2+y^2+3xy+4xz+2yz=-\dfrac{3}{4} \\ x+y+z=0; x<0<y; z \end{cases}$.

Giải:

Ñat u = x; v = x + y; t = y + 2z suy ra u < v < t va $\begin{cases} uvt=\dfrac{1}{8} \\ uv+vt+ut=-\dfrac{3}{4} \\ u+v+t=0 \end{cases}$

nen u; v; t la nghiệm phương ttình bac 3: $4s^3$- 3s = $\frac{1}{2}$

Ñat s = cos~ thì cos3~ = $\frac{1}{2}$ (0<~ <®) nen ~ = $\frac{®}{9}+\frac{2k®}{3}; k \in Z$;

u=cos $\frac{7®}{9}$; v = cos $\frac{5®}{9}$; t = cos $\frac{®}{9}$ suy ra nghiệm.

Ví dụ 4: Giải hệ: $\begin{cases} 3(x+\frac{1}{x})=4(y+\frac{1}{y})=5(z+\frac{1}{z}) \\ x.y+y.z+x.z=1 \end{cases}$ (I)

Giai:

Tö (I) cho x; y; z cung dau suy ra chæ xet x; y; z > 0 nen $\exists$ A;B;C $\in$ (0;®)

sao cho tan(A/2) = x; tan(B/2) = y; tan(C/2) = z .

Ta co: tan(A/2).tan(B/2) + tan(B/2).tan(C/2) + tan(C/2).tan(A/2) = 1

nen A+ B + C = ® hay A; B; C la 3 góc cua 1 tam giac

Ta co: $6.\frac{1+x^2}{2x}=8.\frac{1+y^2}{2y}=10\frac{1+z^2}{2z} \Rightarrow \frac{3}{\sin A}=\frac{4}{\sin B}=\frac{5}{\sin C}$

do ño : $\frac{6R}{a}=\frac{8R}{b}=\frac{10R}{c}$ va ABC vuong ô C nen C = 90^0 ;

sinB = 4/5; sinC = 3/5 ; z = 1 va co x; y .

Ví dụ 5 : Giải hệ: $\begin{cases} x.y=1 \\ z(1-y^2)=2.y \\ x.(1-z^2)=2.z \end{cases}$ (I)

Giải:

Nếu (x; y; z) là 1 nghiệm của (I) thì y; z không thể bằng 1 hay -1

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x.y = 1 \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2} \end{cases}$. Đặt x = tanu; y = tanv; z = tanw.

Ta có: $\begin{cases} \tan u = \cot v (i) \\ \tan w = \tan 2v (ii) \\ \tan u = \mathrm{t}\,an 2\mathrm{w(iii)} \end{cases}$.

(ii) suy ra w = 2v + k.® ; u = 2w + l® với k, l nguyên nên
u = 4v + 2k® + l® .

Thay vào (i) ta được tan(4v + 2k® + l®) = cotv nên v = $\frac{®}{10} + \frac{m®}{5}$.

Suy ra nghiệm.

3. ***Bài tập tự giải:***

Giải các hệ phương trình:

1/ $\begin{cases} 3(x + \frac{1}{x}) = 4(y + \frac{1}{y}) = 5(z + \frac{1}{z}) \\ x.y + y.z + z.x = 1 \end{cases}$.

2/ $\begin{cases} x^3 - 3x = y(3x^2 - 1) \\ y^3 - 3y = z(3y^2 - 1) \\ z^3 - 3z = x(3z^2 - 1) \end{cases}$.

3/ $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} = 1/4 \\ y\sqrt{1-x^2} = 1/4 \end{cases}$

4/ $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \\ x.\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = 1/2 \end{cases}$.